

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA I

MODUL 8

URČITÝ INTEGRÁL



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Obsah

1 Úvod.	4
1.1 Cíle modulu.	4
1.2 Požadované znalosti.	4
1.3 Doba potřebná ke studiu.	4
1.4 Klíčová slova.	5
2 Newtonův integrál.	6
3 Riemannův integrál.	9
4 Základní vlastnosti určitého Newtonova integrálu.	11
5 Integrál jako funkce horní (resp. dolní) meze. Integrály závislé na parametru.	15
6 Geometrické aplikace určitého integrálu.	16
6.1 Délka křivky.	16
6.2 Plošný obsah rovinného obrazce.	20
6.3 Objem rotačního tělesa.	22
6.4 Obsah rotační plochy.	24
7 Aplikace určitého integrálu v mechanice.	26
7.1 Hmotnost, statický moment a moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů.	26
7.2 Hmotnost, statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti tenké homogenní rovinné desky.	27
7.3 Hmotnost, statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti homogenního rovinného oblouku.	31
7.4 Guldinovy věty	33
8 Některé další fyzikální aplikace.	34
9 Kontrolní otázky.	37
10 Výsledky cvičení.	38
11 Studijní prameny.	40
A Pojem křivky v rovině.	41
B Vzorová zadání kontrolních testů.	47

1 Úvod.

1.1 Cíle modulu.

Odstavec 1. Seznámíte se s pojmem zobecněné primitivní funkce a jejím využitím při definici Newtonova integrálu, který nám umožní výpočet „určitých“ integrálů. Je nutné dobře zvládnout tuto definici se všemi předpoklady (zvláště nezapomínejte na požadavek spojitosti primitivní funkce F) a umět pomocí této definice řešit určité integrály.



Odstavec 2. Seznámíte se definicí Riemannova integrálu, kterou budeme využívat při odvozování jednotlivých vztahů u geometrických a fyzikálních aplikací určitého integrálu.

Odstavec 3. Je věnován základním vlastnostem Newtonova integrálu, metodě per partes a substituční metodě pro výpočet určitých integrálů. Je nutné znát předpoklady pro použití těchto integračních metod a porozumět změně mezi u substituční metody.

Odstavec 4. Je spíše informativního charakteru a jeho cílem je poskytnout poznatky pro využití integrálu závislých na parametru v dalších partiích matematické analýzy.

Odstavec 5. Užitím definice Riemannova integrálu jsou zde odvozeny jednotlivé geometrické aplikace určitého integrálu. Tento odstavec je dosti náročný a jeho cílem je, abyste uměli sestavit integrální součty pro uvedené aplikace a tím porozuměli vzorcům pro jejich výpočet. Bez propočítání dostatečného množství příkladů se vám jen stěží podaří tuto problematiku zvládnout.

Odstavce 6. až 8. Také v těchto odstavcích je hlavním cílem porozumět vytváření integrálních součtů pro jednotlivé aplikace určitého integrálu v mechanice a fyzice. Projděte si důkladně vyřešené příklady a na jejich základě si spočítejte příklady ze cvičení.

1.2 Požadované znalosti.

Pro zvládnutí určitého integrálu je potřebné dobře umět výpočty primitivních funkcí (viz modul Neurčitý integrál). V aplikacích určitého integrálu je nezbytné znát grafy a rovnice základních rovinných křivek (viz Dodatek tohoto modulu).



1.3 Doba potřebná ke studiu.

Přibližně lze odhadnout potřebnou dobu ke studiu jednorozměrného integrálu na 15 hodin. Pro získání zkušeností a zručnosti ve výpočtu aplikačních úloh bude ještě zřejmě zapotřebí další čas závislý na dosavadní početní praxi studenta.



1.4 Klíčová slova.

Zobecněná primitivní funkce, Newtonův integrál, Riemannův integrální součet, norma dělení, Riemannův integrál, základní vlastnosti Newtonova integrálu, metoda per partes pro Newtonův integrál, metoda substituční pro Newtonův integrál, délka křivky, plošný obsah rovinné oblasti, objem rotačního tělesa, obsah rotační plochy tělesa, těžiště rovinné desky, těžiště rovinného oblouku.



2 Newtonův integrál.

Historicky nejstarší je definice Newtonova integrálu, která je založena na pojmu primitivní funkce.

Definice 2.1. Řekneme, že funkce F je *zobecněná primitivní funkce* k funkci f v intervalu (a, b) ,
 $-\infty \leq a < b \leq \infty$, jestliže platí

- (a) F je spojitá na (a, b) ,
- (b) $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$ s výjimkou nejvýše spočetné podmnožiny M intervalu (a, b) .

Poznámka 2.1. Funkce f přitom nemusí být definovaná na $L \subseteq M$. Každá konečná množina je nejvýše spočetná. Množina všech přirozených čísel resp. celých čísel je nejvýše spočetná. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je nejvýše spočetná.



Poznámka 2.2. V dalším budeme místo zobecněné primitivní funkce užívat stručnější označení – primitivní funkce.



Definice 2.2. Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f v (a, b) , kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, a existují-li vlastní (konečné) limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$, pak číslo

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x)$$

nazýváme *Newtonovým integrálem funkce f na intervalu (a, b)* .

Množinu všech funkcí, které mají Newtonův integrál na intervalu (a, b) , značíme $\mathcal{N}(a, b)$.

Poznámka 2.3.



- (a) Je-li funkce F spojitá v $\langle a, b \rangle$, pak

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- (b) Pokud známe primitivní funkci, Newtonův integrál podle předešlé definice snadno spočítáme. Dále si všimněme, že v předešlé definici nepožadujeme omezenost intervalu I ani ohraničenost integrované funkce.

Příklad 2.1. Vypočtěte integrál



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{1+x^2}$ má na intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkci $\operatorname{arctg} x$ a platí

$$[\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

a podle Definice 2.2 máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

Příklad 2.2. Vypočtěte integrál



$$\int_a^b f(x) dx,$$

kde $a < 0 < b$, pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in (a, 0), \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x \in (0, b). \end{cases}$$

Řešení. Funkce f má na intervalu (a, b) zobecněnou primitivní funkci $F(x) = |x|$ a platí

$$\left[|x|\right]_a^b = b - (-a) = b + a$$

a podle Definice 2.2 máme

$$\int_a^b f(x) dx = b + a.$$

Příklad 2.3. Vypočtěte integrál



$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ má na intervalu $(-1, 1)$ primitivní funkci $\arcsin x$ a platí

$$[\arcsin x]_{-1}^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

a podle Definice 2.2 máme

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi.$$

Příklad 2.4. Vypočtěte integrál



$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx.$$

Řešení. Zadaná funkce má na intervalu $(0, 2)$ primitivní funkci $3\sqrt[3]{x-1}$ a platí

$$\left[3\sqrt[3]{x-1}\right]_0^2 = 3(1 - (-1)) = 6$$

a podle Definice 2.2 máme

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx = 6.$$

Příklad 2.5. Vypočtěte integrál



$$\int_0^\infty \sin x dx.$$

Řešení. Funkce $\sin x$ má na intervalu $(0, \infty)$ primitivní funkci $-\cos x$ a platí

$$[-\cos x]_0^\infty = -\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x + \cos 0 = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x,$$

a protože předešlá limita neexistuje, neexistuje také zadaný integrál.

Příklad 2.6. Vypočtěte integrál



$$\int_0^e |\ln x| dx.$$

Řešení. Platí

$$|\ln x| = \begin{cases} -\ln x & \text{pro } x \in (0, 1), \\ \ln x & \text{pro } x \in (1, e). \end{cases}$$

Podle Příkladu 2.4(h) v Modulu *Neurčitý integrál* je k dané funkci $\ln x$ primitivní funkce $x(\ln x - 1)$. Zobecněná primitivní je pak

$$F(x) = \begin{cases} -x(\ln x - 1) - 1 & \text{pro } x \in (0, 1), \\ x(\ln x - 1) + 1 & \text{pro } x \in (1, e). \end{cases}$$

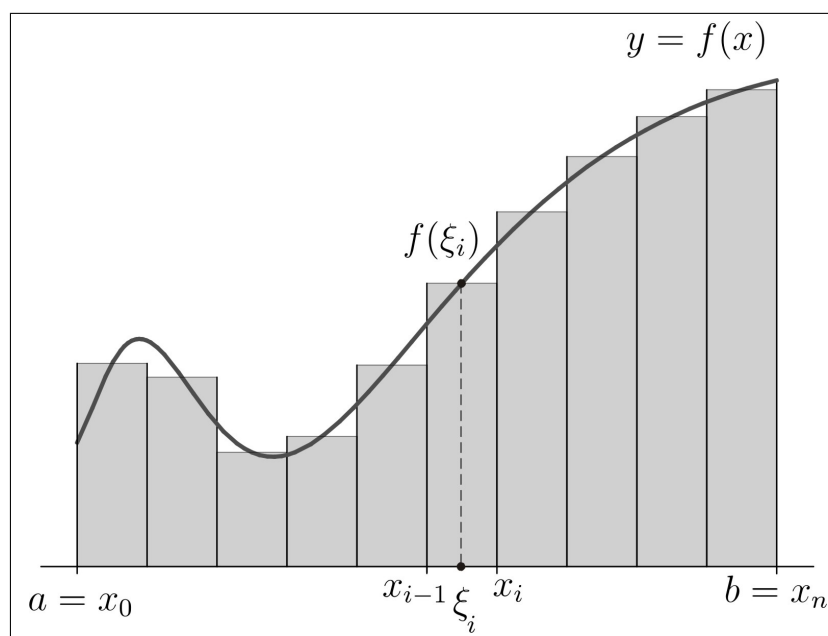
a podle Definice 2.2 máme

$$\int_0^e |\ln x| dx = [F(x)]_0^e = F(e) - \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 + 1 = 2.$$

3 Riemannův integrál.

Nyní si zavedeme definici Riemannova integrálu, která je geometricky velmi názorná a lze ji využít jako základ pro přibližný (numerický) výpočet určitého integrálu a při odvozování fyzikálních veličin.

Uvažujme interval $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$, $a < b$ jsou konečná, reálná čísla a nech D_n je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Každý interval $I_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ nazýváme *částečným intervalem* dělení D_n .



Obrázek 1: Riemannův integrální součet.

Délku (míru) intervalu I_i definujeme $\mu(I_i) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Výraz $\nu(D_n) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{\Delta x_i\}$ nazýváme normou dělení D_n .

Definice 3.1. Nech f je ohraničená funkce na I , D_n dělení I s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Označme \mathcal{D}_n množinu všech n -tic bodů $\xi^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_i \in I_i$. Íslo

$$S(f, D_n, \xi^{(n)}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$


pro $\xi^{(n)} \in \mathcal{D}_n$ se nazývá *Riemannovým integrálním součtem* funkce f , příslušným dělení D_n a n -tici $\xi^{(n)} \in \mathcal{D}_n$.

Definice 3.2. ekneme, že funkce f má na intervalu $\langle a, b \rangle$ určitý *Riemannův integrál* $A \in \mathbb{R}$ tehdy a jen tehdy, když platí


$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n, \xi^{(n)}) = A$$

pro každou posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$, každou posloupnost $\{\xi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ a tato limita nezávisí na volbě posloupnosti $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ a výběru posloupnosti $\{\xi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 3.1. Každá spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$ má určitý Riemannův i Newtonův integrál a tyto integrály jsou si rovny.

Poznámka 3.1. Množinu všech riemannovsky integrovatelných funkcí na $\langle a, b \rangle$ značíme $\mathcal{R}(a, b)$. 

Poznámka 3.2. Počítat Riemannův integrál přímo z definice by bylo ovšem velice pracné. Je tedy zřejmé, že počítáme Riemannův integrál pomocí Newtonova. 

Poznámka 3.3. Všimněte si, že při konstrukci Riemannova integrálu jsme předpokládali, že jak funkce f tak i interval $\langle a, b \rangle$ jsou ohraničené. Při rozšiřování Riemannova integrálu na neohraničené intervaly a pro neohraničené funkce dostáváme tzv. *nevlastní integrály*, které se definují užitím limit, např. integrál 

$$\int_a^{\infty} f(x) dx,$$

kde $a \in \mathbb{R}$, f je ohraničená a integrovatelná v každém intervalu $\langle a, b \rangle \subset \langle a, \infty \rangle$, definujeme jako

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Analogicky definujeme nevlastní integrál pro neohraničenou funkci v intervalu $\langle a, b \rangle$. V případě, že jsou limity konečné, říkáme, že nevlastní integrál *konverguje* (nebo že existuje). Pokud vlastní limita neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál *diverguje*.

Vidíme, že tyto úvahy jsou již velmi blízké našemu pojetí Newtonova integrálu. Přitom platí, že existují-li Newtonův integrál i Riemannův vlastní nebo nevlastní integrál, pak se sobě rovnají.

4 Základní vlastnosti určitého Newtonova integrálu.

Základní vlastnosti určitého Newtonova integrálu jsou shrnuty v následující větě.

Věta 4.1. *Nechť $-\infty \leq a < b \leq \infty$.*

- (a) *Nechť funkce f a g mají Newtonův integrál na intervalu (a, b) (tj. $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$). Pak platí*

$$\int_a^b (kf(x) + lg(x)) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx + l \int_a^b g(x) \, dx,$$

kde k, l jsou libovolná reálná čísla.

- (b) *Nechť $a < c < b$. Pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a, c)$ a $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Navíc platí*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

- (c) *Nechť $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx,$$

je-li $0 \leq f(x) \leq g(x)$ všude, kde funkce f a g jsou spojitě.

- (d) *Jestliže $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$, pak platí*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

- (e) *Jestliže $|f(x)| \leq M$ všude, kde funkce f je spojitá, $|f| \in \mathcal{N}(a, b)$ a čísla a, b jsou konečná, pak*

$$\int_a^b |f(x)| \, dx \leq M(b - a).$$

- (f) *Jestliže je funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a čísla a, b jsou konečná, pak existuje bod $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že*

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)(b - a).$$

(g) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$, pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Věta 4.2. (Metoda per partes.) Nechť $u, v \in \mathcal{N}(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Jsou-li funkce u a v spojité na (a, b) a mají zde derivaci s výjimkou nejvýše spočetné množiny bodů, pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx,$$

mají-li alespoň dva ze tří výrazů konečnou hodnotu.

Poznámka 4.1. Výrazem $[u(x)v(x)]_a^b$ rozumíme

$$\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x)$$

Důkaz. Plyne z věty o derivaci součinu funkcí a definice primitivní funkce.

Příklad 4.1. Vypočtěte integrál

$$I = \int_0^1 (1 + 3x) \sin(1 - 2x)\pi dx.$$

Řešení. Funkce $u(x) = 1 + 3x$, $v(x) = \frac{1}{2\pi} \cos(1 - 2x)\pi$ mají na intervalu $(0, 1)$ spojité derivace a tedy platí

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 + 3x) \sin(1 - 2x)\pi dx \\ &= \left| \begin{array}{l} u(x) = 1 + 3x, \quad v'(x) = \sin(1 - 2x)\pi \\ u'(x) = 3, \quad v(x) = \frac{\cos(1 - 2x)\pi}{2\pi} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[(1 + 3x) \cos(1 - 2x)\pi \right]_0^1 - \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \cos(1 - 2x)\pi dx \\ &= -\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{3}{4\pi^2} \left[\sin(1 - 2x)\pi \right]_0^1 = -\frac{3}{2\pi}. \end{aligned}$$

Příklad 4.2. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\infty} te^{-t} dt.$$

Řešení. Funkce te^{-t} má na intervalu $(0, \infty)$ primitivní funkci $-(t+1)e^{-t}$ a platí

$$\left[-(t+1)e^{-t}\right]_0^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow \infty} (t+1)e^{-t} + 1 = 1$$

a podle Definice 2.2 máme

$$\int_0^{\infty} te^{-t} dt = 1.$$

Příklad 4.3. Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 x \ln x dx.$$

Řešení. Funkce $x \ln x$ je spojitá na $(0, 1)$ a má zde derivaci v každém bodě intervalu $(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u(x) = \ln x, \quad v'(x) = x \\ u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right| \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \\ &= 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4} [x^2]_0^1 = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Věta 4.3. (Věta o substituci.) Necht' $-\infty \leq a < b \leq \infty$, funkce φ je ryze monotonní, spojitá a má konečnou nenulovou derivaci na (a, b) s výjimkou nejvýše spočetné množiny bodů a funkce f je spojitá na intervalu J takovém, že $\varphi(a, b) \subseteq J$. Pak platí

$$\int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

existuje-li jeden z integrálů a kde $\varphi(a^+) = \lim_{t \rightarrow a^+} \varphi(t)$, $\varphi(b^-) = \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t)$.

Příklad 4.4. Vypočtěte integrál

$$\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$$

Řešení. Zavedeme substituci $x = \varphi(t) = \frac{1}{t}$. Funkce φ je ryze monotonní, spojitá a má nenulovou derivaci na $(0, \frac{\pi}{2})$. Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ je spojitá na $(\frac{2}{\pi}, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) = \frac{1}{t}, \quad t = \frac{\pi}{2}, 0 \\ \varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}, \quad x = \left(\frac{2}{\pi}, \infty\right) \end{array} \right| \\
&= -\int_{\pi/2}^0 \sin t dt = \int_0^{\pi/2} \sin t dt \\
&= [-\cos t]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.
\end{aligned}$$

Příklad 4.5. Vypočtěte integrál



$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} t)^2 \cos^2 t} dt.$$

Řešení. Zavedeme substituci $\varphi(t) = \operatorname{tg} t = x$. Funkce φ je rzye monotonní, spojitá a má nenulovou derivaci $\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ na $(0, \frac{\pi}{2})$. Funkce f je spojitá na $(0, \infty)$.

$$\begin{aligned}
I &= \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t, \quad t = 0, \frac{\pi}{2} \\ \varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad x = 0, \infty \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx \\
&= \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Cvičení 4.1. Vypočtěte integrály:



- | | |
|---|--|
| a) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ | f) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| b) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$ | g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$ |
| c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx$ | h) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$ |
| d) $\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$ | i) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ |
| e) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ | j) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{ x }} dx$ |

5 Integrál jako funkce horní (resp. dolní) meze. Integrály závislé na parametru.

Věta 5.1. Nechť $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a $c \in (a, b)$ libovolné. Pak je funkce

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in (a, b)$$

zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na (a, b) .

Označme

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx. \quad (*)$$

Věta 5.2. Nechť funkce $f(x, t)$ je spojitá na intervalu $J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Pak integrál $(*)$ je spojitou funkcí proměnné t na intervalu $\langle c, d \rangle$.

Příklad 5.1. Nechť c a d , $c < d$ jsou libovolná čísla taková, že $0 \notin \langle c, d \rangle$. Pro libovolné $t \in \langle c, d \rangle$ vypočtěte integrál

$$I(t) = \int_0^1 f(x, t) dx,$$

kde funkce $f : \langle 0, 1 \rangle \times \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je dána předpisem $f(x, t) = e^{x/t}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^1 e^{\frac{x}{t}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(u) = tu, \quad u = 0, \frac{1}{t} \\ \varphi'(u) = t, \quad x = 0, 1 \end{array} \right| \\ &= t \int_0^{1/t} e^u du = t \left[e^u \right]_0^{1/t} = t \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Věta 5.3. Nechť funkce $f(x, t)$ je spojitá v proměnné x na intervalu $\langle a, b \rangle$ pro každé $t \in \langle c, d \rangle$. Dále předpokládejme, že existuje parciální derivace $f'_t(x, t)$, která je spojitá na $J = (a, b) \times (c, d)$. Pak platí

$$I'(t) = \int_a^b f'_t(x, t) dx$$

pro každé $t \in (c, d)$.



Příklad 5.2. Je dána funkce

$$f(x, t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{t} \right)$$

na intervalu $\langle 0, 1 \rangle \times \langle c, d \rangle$, $0 \notin \langle c, d \rangle$, $c < d$ libovolná reálná čísla. Pak pro funkci

$$I(t) = \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{t} dx, \quad t \in \langle c, d \rangle$$

platí

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^1 \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{t} \right)'_t dx = - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + t^2} dx \\ &= - \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + t^2) \right]_0^1 = \ln \frac{|t|}{\sqrt{1 + t^2}}. \end{aligned}$$

pro každé $t \in \langle c, d \rangle$.

Příklady integrálů závislých na parametru:
Gama funkce

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0.$$

Využitím funkce Γ lze vypočítat integrály, které se využívají v teorii pravděpodobnosti:

- (tzv. Laplaceův–Gaussův integrál)

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

-

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0,$$

kde μ je střední hodnota a σ je směrodatná odchylka.

6 Geometrické aplikace určitého integrálu.

6.1 Délka křivky.

Před studiem tohoto odstavce si nejprve pozorně prostudujte část *Pojem křivky v rovině* v dodatku tohoto modulu – klikněte zde.



Nechť je dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, který má parametrické rovnice

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

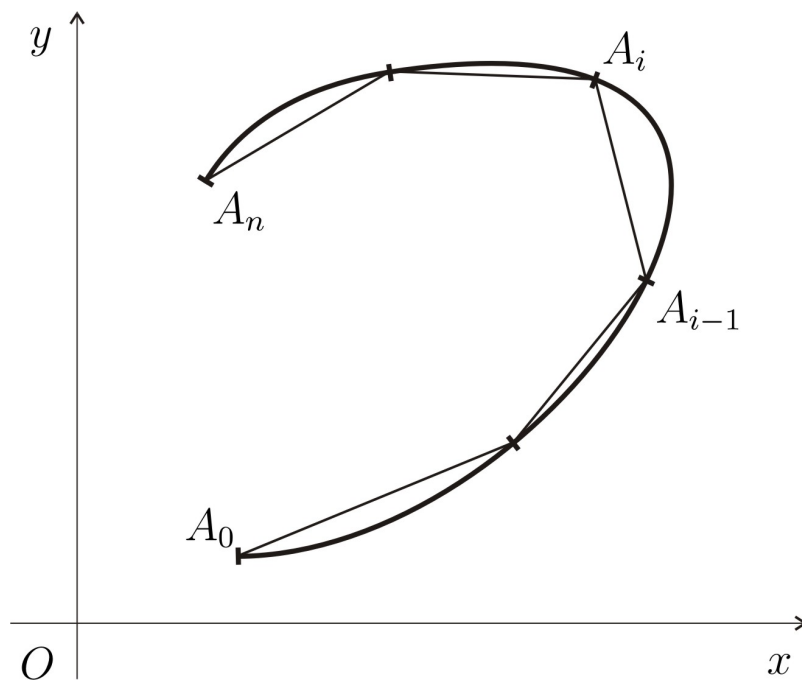
Uvažujme dělení intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ s dělicími body $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Především zobrazením je parametru t_i přiřazen bod křivky $A_i = [\varphi(t_i), \psi(t_i)]$. Chceme znát délku celé křivky. Označme Δl_i délku úsečky $\overline{A_{i-1}A_i}$. Délka úsečky $\overline{A_{i-1}A_i}$ je tedy dána vztahem

$$\Delta l_i = \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}.$$

Délka lomené čáry $A_0A_1 \dots A_iA_{i+1} \dots A_n$ je součet

$$L_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}.$$

Toto číslo jistě neudává délku křivky γ přesně, ale přibližně.



Obrázek 2: Délka křivky.

Nyní na každý výraz pod odmocninou použijeme větu o střední hodnotě

$$\begin{aligned} \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) &= \varphi'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\Delta t_i \\ \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) &= \psi'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \psi'(\eta_i)\Delta t_i, \end{aligned}$$

kde ξ_i a η_i jsou body ležící v intervalu (t_{i-1}, t_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 (\Delta t_i)^2 + [\psi'(\eta_i)]^2 (\Delta t_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\eta_i)]^2} \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\eta_i)]^2} \Delta t_i \end{aligned}$$

Nahradíme-li v předešlém výrazu bod η_i bodem ξ_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ máme

$$\tilde{L}_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2} \Delta t_i,$$

a tento výraz je integrálním součtem funkce $\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$. Položme

$$\nu_n = \max \{ \Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n \}.$$

Dá se ukázat, že když $\nu_n \rightarrow 0$ pak

$$|L_n - \tilde{L}_n| \rightarrow 0.$$

a přejdeme-li ve výrazu L_n k limitě, tj. bude-li existovat limita

$$\lim_{\nu_n \rightarrow 0} \tilde{L}_n = \lim_{\nu_n \rightarrow 0} L_n = \lim_{\nu_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\eta_i)]^2} \Delta t_i,$$

pak tuto limitu nazveme délkou křivky.

V případě parametrických rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, je tedy délka křivky dána vztahem

$$L = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

a ve speciálních případech, je-li dána křivka předpisem $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ a derivace f' je konečná na (a, b) , pak platí

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

nebo je-li dána křivka předpisem $x = g(y)$, $y \in \langle c, d \rangle$ a derivace g' je konečná na (c, d) , pak platí

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy.$$

Délka křivky v případě polárních souřadnic $r = g(\varphi)$, kde g je spojitá na $\langle \alpha, \beta \rangle$, g' konečná na (α, β) je

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g^2(\varphi) + [g'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Příklad 6.1. Vypočtěte délku jednoho oblouku cykloidy o parametrických rovnicích

$$x = \varphi(t) = a(t - \sin t), \quad y = \psi(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

kde $a > 0$.

Řešení.

$$\varphi'(t) = a(1 - \cos t), \quad \psi'(t) = a \sin t,$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 4a(-\cos \pi + \cos 0) = 8a \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Příklad 6.2. Vypočtěte délku křivky o rovnici $f(x) = \ln x$, $x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$.

Řešení.

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx \\ &= \left| \begin{array}{ll} x = \varphi(u) = \sqrt{u^2 - 1} & x = \sqrt{3}, \sqrt{8} \\ \varphi'(u) = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} & u = 2, 3 \end{array} \right| \\ &= \int_2^3 \frac{u^2}{u^2 - 1} du = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du \\ &= \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)} \right) du \\ &= \left[u + \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} \right]_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \doteq 1.203 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Cvičení 6.1. Vypočtěte délku křivky:

- a) $y = 1 - \ln(\cos x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$;
- b) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (\ln 2, \ln 5)$;
- c) $y = e^x$, $x \in (0, 1)$;
- d) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$, $x \in (0, 1)$;
- e) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in (0, \pi)$, $a > 0$;
- f) $x = a(t \sin t + \cos t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a > 0$.

6.2 Plošný obsah rovinného obrazce.

- Plošný obsah části roviny

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, f_1(x) < y < f_2(x)\},$$

kde f_1, f_2 jsou spojité funkce takové, že $f_1(x) \leq f_2(x)$, pro každé $x \in (a, b)$, se spočte podle vzorce

$$P(A) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Podobně, plošný obsah části roviny

$$B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, g_1(y) < x < g_2(y)\},$$

kde g_1, g_2 jsou spojité funkce takové, že $g_1(y) \leq g_2(y)$ pro každé $y \in (c, d)$, se spočte podle vzorce

$$P(B) = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)] dy.$$

- Obsah části roviny ohraničené grafem funkce dané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) |\varphi'(t)| dt, \quad \psi(t) \geq 0, \varphi'(t) \neq 0, t \in (\alpha, \beta),$$

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) |\psi'(t)| dt, \quad \varphi(t) \geq 0, \psi'(t) \neq 0 t \in (\alpha, \beta).$$

- Plošný obsah v případě polárních souřadnic $r = g(\varphi)$, kde g je kladná a spojitá funkce definovaná na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq \langle 0, 2\pi \rangle$, je daný vztahem

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g^2(\varphi) d\varphi.$$

Příklad 6.3. Vypočtěte obsah elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

Řešení.

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) = a \cos t \quad t = \frac{\pi}{2}, 0 \\ \varphi'(t) = -a \sin t \quad x = 0, a \end{array} \right. \\ &= -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin t \sqrt{1 - \cos^2 t} dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= 2ab \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \pi ab [m^2]. \end{aligned}$$



Příklad 6.4. Vypočtěte obsah oblasti omezené osou x a křivkou traktrix s parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t) = a \cos t + a \ln \operatorname{tg}(t/2), \quad y = \psi(t) = a \sin t, \quad t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right),$$

kde $a > 0$.

Řešení.

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) |\varphi'(t)| dt = 2a^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left| \frac{1}{\sin t} - \sin t \right| \sin t dt = 2a^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2 t dt \\ &= 2a^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= a^2 \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2} \sin \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}\pi \right) = \frac{\pi - 2}{2} a^2 [m^2]. \end{aligned}$$



Příklad 6.5. Vypočtěte obsah lemniskáty $r = g(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $a > 0$.

Řešení. Ze symetrie máme

$$\frac{1}{4}P = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} g^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} a^2 [m^2].$$

Potom $P = a^2 [m^2]$.



Příklad 6.6. Vypočtěte plošný obsah části roviny

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 8, y^2 < 2x\}.$$

Řešení.

$$P = 2 \int_0^2 \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = 2 \int_0^2 \sqrt{8 - y^2} dy - \int_0^2 y^2 dy = 2P_1 - P_2,$$

$$P_1 = \left[\frac{1}{2}y\sqrt{8 - y^2} + 4 \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{4}y \right) \right]_0^2 = 2 + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + 4\pi$$

$$P_2 = \left[\frac{1}{3}y^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

Celkem tedy

$$P = \frac{4}{3} + 2\pi [m^2].$$

Cvičení 6.2. Vypočtěte plošný obsah daného rovinného obrazce A :

a) $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y < 3x^3, y < \frac{1}{x}, x - y < 2, x > 0\}$;

b) $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y < \arctg x, y > 0, x < 1\}$.

Cvičení 6.3. Vypočtěte obsah oblasti omezené osou x a křivkou s parametrickými rovnicemi:

a) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in (0, \pi), a > 0$;

b) $x = \cosh t, y = \sinh t, t \in (0, 1)$.

6.3 Objem rotačního tělesa.

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a nechť f je spojitá na (a, b) . Uvažujme těleso vzniklé rotací plochy

$$P = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < y < |f(x)|\}$$

kolem osy x . Odvodíme vzorec pro výpočet objemu V_x takto daného rotačního tělesa.

Uvažujme dělení intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Označme ΔV_i objem válce o výšce $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a poloměru $f(\xi_i)$, kde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Potom

$$\Delta V_i = \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i.$$

Součet

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \pi \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \Delta x_i.$$

je pak přibližně objemem tělesa. Položme

$$\nu_n = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$$

a přejděme ve výrazu V_n k limitě. Bude-li existovat limita

$$\lim_{\nu_n \rightarrow 0} V_n = \lim_{\nu_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \Delta x_i,$$

pak ji nazveme objemem tělesa. Platí

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Podobně lze odvodit vzorec pro výpočet objemu V_y tělesa vzniklého rotací plochy $P = \{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, 0 < x < |g(y)| \}$ kolem osy y , kde g je spojitá na (c, d) . Platí

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y) dy.$$

V případě parametrického zadání máme

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) |\varphi'(t)| dt, \quad \psi(t) \geq 0, \varphi'(t) \neq 0,$$

$$V_y = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t) |\psi'(t)| dt, \quad \varphi(t) \geq 0, \psi'(t) \neq 0.$$

Příklad 6.7. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací kolem osy x plochy

$$P = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{h/p} < x < \sqrt{h/p}, 0 < y < -px^2 + h \right\},$$

kde $p, h > 0$ jsou dané konstanty.

Řešení.

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_{-\sqrt{h/p}}^{\sqrt{h/p}} (-px^2 + h)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{h/p}} (-px^2 + h)^2 dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{h/p}} (p^2x^4 - 2phx^2 + h^2) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{5}p^2x^5 - \frac{2}{3}hpx^3 + h^2x \right]_0^{\sqrt{h/p}} = \frac{16}{15}\pi h^2 \sqrt{\frac{h}{p}} [m^3]. \end{aligned}$$



Cvičení 6.4. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací daného rovinného obrazce A kolem dané osy:



- a) $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y < x + 1, y > 2x, x > 0\}$ kolem osy x ;
- b) $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < e^{-x}\sqrt{\sin x}\}$ kolem osy x ;
- c) $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, y^2 < x\}$ kolem osy y .

Cvičení 6.5. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací kolem osy y rovinného obrazce vymezeného křivkou



$$x = (2 \cos t - \cos 2t), \quad y = (2 \sin t - \sin 2t), \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

6.4 Obsah rotační plochy.

(a) Rotací plochy $P = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < y < |f(x)|\}$ (f' konečná na (a, b)) kolem osy x , resp. rotací plochy $P = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, 0 < x < |g(y)|\}$ (g' konečná na (c, d)) kolem osy y . Uvažujme dělení intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$, $a < b$ konečná, reálná s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Označme ΔP_i obsah pláště komolého kužele o poloměrech $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ a výšce Δx_i , pak

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Součet

$$P_n = \sum_{i=1}^n \Delta P_i = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

je přibližně obsah pláště tělesa.

Nyní na výraz pod odmocninou použijeme větu o střední hodnotě

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i$$

a

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \doteq f(\xi_i),$$

kde ξ_i je bod ležící v intervalu (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Položme

$$\nu_n = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

a přejděme ve výrazu P_n k limitě, tj. bude-li existovat limita

$$\lim_{\nu_n \rightarrow 0} P_n = \lim_{\nu_n \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i,$$

pak tuto limitu nazveme plochou pláště tělesa. Dostáváme

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad P_y = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy,$$

(b) V případě parametrického zadání máme pro oblouk

$$P_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

kde $\psi(t) \geq 0$, pro $t \in (\alpha, \beta)$,

$$P_y = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

kde $\varphi(t) \geq 0$, pro $t \in (\alpha, \beta)$.

Příklad 6.8. Vypočítejte povrch koule o poloměru r .

Řešení.

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r [x]_{-r}^r = 4\pi r^2 [m^2]. \end{aligned}$$



Příklad 6.9. Vypočítejte povrch tělesa, které vznikne rotací plochy omezené horní polovinou asteroidy o parametrických rovnicích

$$x = \varphi(t) = a \cos^3 t, \quad y = \psi(t) = a \sin^3 t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle$$

a osou x .

Řešení. Ze symetrie tělesa plyne, že stačí vypočítat polovinu obsahu.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -3a \cos^2 t \sin t, & \psi'(t) &= 3a \sin^2 t \cos t, \\ \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} = 3a |\sin t \cos t|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_x &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt \\ &= 6\pi a^2 \left[\frac{1}{5} \sin^5 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{6}{5} \pi a^2 [m^2]. \end{aligned}$$

Potom celá plocha $P_x = \frac{12}{5} \pi a^2 [m^2]$.



Cvičení 6.6. Vypočtěte obsah pláště rotačního tělesa vzniklého rotací dané plochy A kolem dané osy rotace:

a) $A = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{\pi}{4}, 0 < y < \operatorname{tg} x \right\}$ kolem osy x ;

b) $A = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : -3 < x < 2, 0 < y < \sqrt{4+x} \right\}$ kolem osy x .

Cvičení 6.7. Vypočtěte obsah plochy vzniklé rotací dané křivky γ kolem dané osy:

a) $\gamma : x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ kolem osy y ;

b) $\gamma : x = 4(1 - \sqrt{t}), y = \frac{4}{3}t\sqrt{t}, t \in (0, 1)$ kolem osy x .

7 Aplikace určitého integrálu v mechanice.

7.1 Hmotnost, statický moment a moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů.

Hmotnost soustavy m je

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Statický moment hmotného bodu o hmotnosti m vzhledem k přímce p je definován vztahem

$$S_p = md,$$

kde d je orientovaná kolmá vzdálenost hmotného bodu od přímky.

Statický moment soustavy hmotných bodů o hmotnostech m_i vzhledem k přímce p je definován vztahem

$$S_p = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n m_i d_i,$$

kde d_i jsou orientované kolmé vzdálenosti hmotných bodů od přímky p .

Těžiště soustavy hmotných bodů je bod $T = [x_T, y_T]$, který má tu vlastnost, že kdyby v něm byla soustředěna veškerá hmota soustavy, pak by měl stejný statický moment jako celá soustava.

Moment setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti m vzhledem k přímce p je definován vztahem

$$I_p = md^2,$$

kde d je kolmá vzdálenost hmotného bodu od přímky.



Moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů o hmotnostech m_i vzhledem k přímce p je definován vztahem

$$I_p = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2,$$

kde d_i jsou kolmé vzdálenosti hmotných bodů od přímky p .

7.2 Hmotnost, statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti tenké homogenní rovinné desky $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ o plošné hustotě σ [$kg \cdot m^{-2}$].

Hmotnost

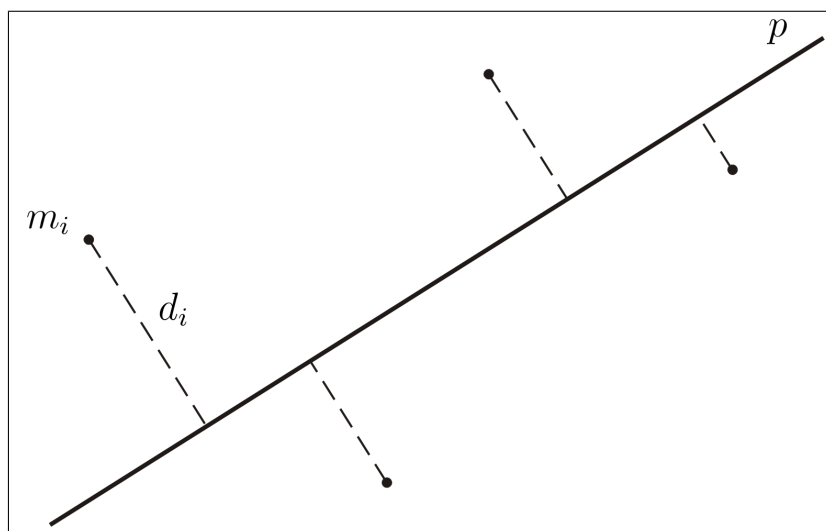
$$m = \sigma \int_a^b [f(x) - g(x)] dx,$$

Nyní odvodíme statické momenty vzhledem k souřadným osám (viz Obr. 4)

$$\Delta m_i = \sigma [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta x_i,$$

$$\Delta S_x^i = \frac{1}{2} [f(\xi_i) + g(\xi_i)] \Delta m_i = \frac{1}{2} \sigma [f^2(\xi_i) - g^2(\xi_i)] \Delta x_i,$$

$$S_x(n) = \sum_{i=1}^n \Delta S_x^i = \frac{1}{2} \sigma \sum_{i=1}^n [f^2(\xi_i) - g^2(\xi_i)] \Delta x_i$$



Obrázek 3: Statický moment soustavy hmotných bodů.

a to je Riemannův integrální součet pro funkci $\frac{1}{2}\sigma [f^2(x) - g^2(x)]$. Položme

$$\nu_n = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$$

a přejděme ve výrazu $S_x(n)$ k limitě, tj. bude-li existovat limita

$$\frac{1}{2}\sigma \lim_{\nu_n \rightarrow 0} S_x(n) = \lim_{\nu_n \rightarrow 0} \frac{1}{2}\sigma \sum_{i=1}^n [f^2(\xi_i) - g^2(\xi_i)] \Delta x_i,$$

pak tuto limitu nazveme statickým momentem S_x tenké rovinné desky s plošnou hustotou σ vzhledem k ose x .

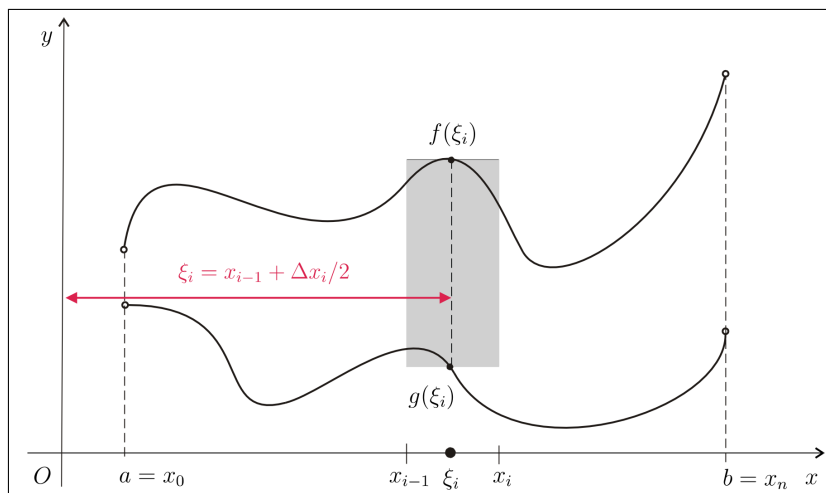
$$\begin{aligned} \Delta S_y^i &= \xi_i \Delta m_i = \sigma [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \xi_i \Delta x_i \\ &= \sigma [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \left(x_i + \frac{1}{2} \Delta x_i \right) \Delta x_i \\ &= \sigma [f(\xi_i) - g(\xi_i)] x_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sigma [f(\xi_i) - g(\xi_i)] (\Delta x_i)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y(n) &= \sum_{i=1}^n \Delta S_y^i \\ &= \sigma \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] x_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sigma \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] (\Delta x_i)^2. \end{aligned}$$

První součet je Riemannův integrální součet pro funkci $\sigma x [f(x) - g(x)]$.

Přejděme ve výrazu $S_y(n)$ k limitě, tj. bude-li existovat limita

$$\begin{aligned} \lim_{\nu_n \rightarrow 0} S_y(n) &= \sigma \lim_{\nu_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] x_i \Delta x_i \\ &+ \frac{1}{2} \sigma \lim_{\nu_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] (\Delta x_i)^2, \end{aligned}$$



Obrázek 4: Statické momenty tenké homogenní rovinné desky.

pak tuto limitu nazveme statickým momentem S_y tenké rovinné desky s plošnou hustotou σ vzhledem k ose y . Dá se ukázat, že druhá limita v předešlém výrazu je nulová.

Celkem dostáváme

$$S_x = \frac{1}{2}\sigma \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx, \quad S_y = \sigma \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx$$

a pro souřadnice těžiště máme

$$T = [x_T, y_T] = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right].$$

Momenty setrvačnosti

$$I_x = \frac{1}{3}\sigma \int_a^b [f^3(x) - g^3(x)] dx, \quad I_y = \sigma \int_a^b x^2 [f(x) - g(x)] dx,$$

Vyjádření v polárních souřadnicích

$$m = \frac{1}{2}\sigma \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi,$$

$$S_x = \frac{1}{3}\sigma \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad S_y = \frac{1}{3}\sigma \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

Příklad 7.1. Vypočítejte souřadnice těžiště tenké homogenní rovinné desky

$$\Omega = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, y < 2/(1+x^2) \right\}.$$



Řešení. Je zřejmé, že $S_y = 0$, protože deska je homogenní a symetrická vzhledem k ose y

$$\begin{aligned} m &= \sigma \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \right) dx = 2 \left[2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{3\pi - 2}{3} [kg] \doteq 2.475 [kg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2}\sigma \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{(1+x^2)^2} - x^4 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{4}{(1+x^2)^2} - x^4 \right) dx = \left[2 \left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x \right) - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5\pi + 8}{10} [kg \cdot m] \doteq 2.371 [kg \cdot m], \end{aligned}$$

$$T = [x_T, y_T] = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right] = \left[0, \frac{3(5\pi + 8)}{10(3\pi - 2)} \right] \doteq [0, 0.958].$$

Příklad 7.2. Vypočítejte souřadnice těžiště homogenní rovinné kruhové výseče o hustotě σ [kg/m^2] o poloměru R a středovém úhlu $\beta - \alpha$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, vzhledem k souřadnicovému osám. Použijte polární souřadnice.



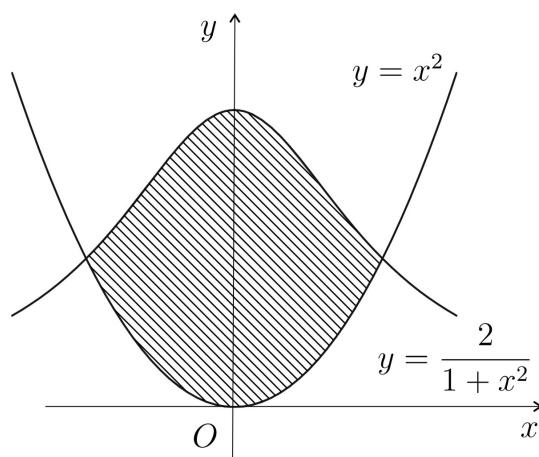
Řešení.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\sigma \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} R^2 d\varphi = \frac{1}{2}R^2 \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi = \frac{1}{2}R^2 [\varphi]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha)R^2 \text{ [kg]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{3}\sigma \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{3}R^3 \int_{\alpha}^{\beta} \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{3}R^3 [-\cos \varphi]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}R^3 (\cos \alpha - \cos \beta) \text{ [kg} \cdot \text{m]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{1}{3}\sigma \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3}R^3 \int_{\alpha}^{\beta} \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3}R^3 [\sin \varphi]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}R^3 (\sin \beta - \sin \alpha) \text{ [kg} \cdot \text{m]}, \end{aligned}$$

$$T = [x_T, y_T] = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right] = \left[\frac{2R(\sin \beta - \sin \alpha)}{3(\beta - \alpha)}, -\frac{2R(\cos \beta - \cos \alpha)}{3(\beta - \alpha)} \right].$$



Obrázek 5: $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, y < 2/(1+x^2)\}$.

7.3 Hmotnost, statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti homogenního rovinného oblouku.

Pro rovinný drát ve tvaru křivky o parametrických rovnicích

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta)$$

platí následující vztahy

$$m = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

$$S_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \quad S_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

$$m = \sigma \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$S_x = \sigma \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad S_y = \sigma \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$T = [x_T, y_T] = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right].$$

Momenty setrvačnosti

$$I_x = \sigma \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad I_y = \sigma \int_a^b x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

$$I_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \quad I_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Vyjádření v polárních souřadnicích:

$$m = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g^2(\varphi) + [g'(\varphi)]^2} d\varphi,$$

$$S_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi) \sin \varphi \sqrt{g^2(\varphi) + [g'(\varphi)]^2} d\varphi,$$

$$S_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi) \cos \varphi \sqrt{g^2(\varphi) + [g'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Příklad 7.3. Vypočtete souřadnice těžiště homogenního rovinného drátu o hustotě $\sigma = 1 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-1}]$, ve tvaru jednoho oblouku cykloidy o parametrických rovnicích



$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad a > 0.$$

Řešení.

$$\varphi'(t) = a(1 - \cos t), \quad \psi'(t) = a \sin t$$

$$\begin{aligned} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} \\ &= 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 4a(-\cos \pi + \cos 0) = 8a \text{ [kg]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 2a^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt - \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \cos t dt \right\} \\ &= 2a^2 \left\{ \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{3} \cos \frac{3}{2}t + 2 \cos \frac{1}{2}t \right]_0^{2\pi} \right\} \\ &= 2a^2 \left(4 + \frac{4}{3} \right) = \frac{32}{3} a^2 \text{ [kg} \cdot \text{m]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = 2a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 2a^2 \left\{ \int_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} dt - \int_0^{2\pi} \sin t \sin \frac{t}{2} dt \right\} \\ &= 2a^2 \left\{ \left[4 \sin \frac{t}{2} - 2t \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \left[2 \sin \frac{1}{2}t - \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}t \right]_0^{2\pi} \right\} \\ &= 2a^2(4\pi - 0) = 8\pi a^2 \text{ [kg} \cdot \text{m]}, \end{aligned}$$

$$T = [x_T, y_T] = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right] = \left[\pi a, \frac{4a}{3} \right].$$

7.4 Guldinovy věty

Věta 7.1. (První Guldinova věta.) Obsah pláště plochy, který vznikne otáčením křivky kolem osy, která tuto křivku neprotíná je rovna součinu délky L této křivky a délky kružnice, kterou opíše těžiště této křivky.

$$P = 2\pi L y_T.$$

Příklad 7.4. Pomocí předešlé věty vypočtěte velikost pláště plochy, která vznikne rotací kolem osy x části roviny omezené obloukem cykloidy o rovnicích

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad a > 0,$$

a osou x . (Využijte výsledky z Příkladu 6.1 a Příkladu 7.3.)

Řešení. V Příkladě 6.1 jsme spočetli délku daného oblouku je $L = 8a$ [m] a z Příkladu 7.3 navíc víme, že $y_T = 4a/3$ [m]. Podle předešlé věty potom máme

$$P = 2\pi L y_T = \frac{64}{3}\pi a^2 \text{ [m}^2\text{]}.$$

Věta 7.2. (Druhá Guldinova věta.) Objem tělesa, které vznikne otáčením plochy kolem osy, která tuto plochu neprotíná, je roven součinu velikosti obsahu P této plochy a délky kružnice, kterou opíše těžiště této plochy.

$$V = 2\pi P y_T.$$

Příklad 7.5. Pomocí předešlé věty určete těžiště homogenní rovinné desky

$$A = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{\frac{h}{p}} < x < \sqrt{\frac{h}{p}}, 0 < y < -px^2 + h \right\},$$

kde $p, h > 0$, o hustotě $\sigma = 1$ [kg · m]. (Využijte výsledky z Příkladu 6.7.)

Řešení. Z Příkladu 6.7 předešlého odstavce známe objem V . Plocha obrazce je dána

$$\begin{aligned} P &= \int_a^b f(x) dx = \int_{-\sqrt{h/p}}^{\sqrt{h/p}} (-px^2 + h) dx = 2 \int_0^{\sqrt{h/p}} (-px^2 + h) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}px^3 + hx \right]_0^{\sqrt{h/p}} = \frac{4}{3}h\sqrt{\frac{h}{p}} \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Z Věty 7.2 potom máme

$$y_T = \frac{V}{2\pi P} = \frac{\frac{16}{15}\pi h^2 \sqrt{\frac{h}{p}}}{\frac{8\pi}{3}h\sqrt{\frac{h}{p}}} = \frac{2}{5}h \text{ [m]},$$

a tedy $T = \left[0, \frac{2}{5}h\right]$.

8 Některé další fyzikální aplikace.

Příklad 8.1. Ve stěně nádrže naplněné vodou je obdélníkový otvor. Horní hrana otvoru je ve vzdálenosti h_0 metrů pod hladinou a dolní hrana h_1 metrů. Ířka otvoru je s metrů. Určete, jaké množství vody Q [m^3] vyteče tímto otvorem za 1 sekundu.

Řešení. Situace je nakreslena na Obr. 6. V hloubce h [m] pod hladinou vytéká voda rychlostí (Toricelliho vzorec)

$$v = \sqrt{2gh} \text{ [} m \cdot s^{-1} \text{]},$$

kde $g \doteq 9.81$ [$m \cdot s^{-2}$] je gravitační zrychlení. Množství vody, které vyteče z pásu o výšce Δh a šířce s je

$$\Delta Q = vs\Delta h = \sqrt{2gh} s\Delta h \text{ [} m^3 \cdot s^{-1} \text{]},$$

a celkové množství je

$$Q = \sqrt{2g} s \int_{h_0}^{h_1} \sqrt{h} dh = \frac{2}{3} \sqrt{2g} s \left(h_1 \sqrt{h_1} - h_0 \sqrt{h_0} \right) \text{ [} m^3 \cdot s^{-1} \text{]}.$$

Poznámka 8.1. Ve skutečnosti je ale výtok menší vlivem tření ve vodě a vlivem zúžení proudu vody.

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} s \left(h_1 \sqrt{h_1} - h_0 \sqrt{h_0} \right) \text{ [} m^3 \cdot s^{-1} \text{]},$$

kde $\mu < 1$ je tabulkový koeficient.

Příklad 8.2. Vypočítejte práci, kterou musíme vykonat, abychom vyčerpali rotačně symetrickou nádrž o výšce v metrů (viz Obr. 7), která je celá naplněna kapalinou o hustotě ρ [$kg \cdot m^{-3}$].

Řešení. Element válce vody výšky Δy a poloměru $h(y)$, který má hmotnost

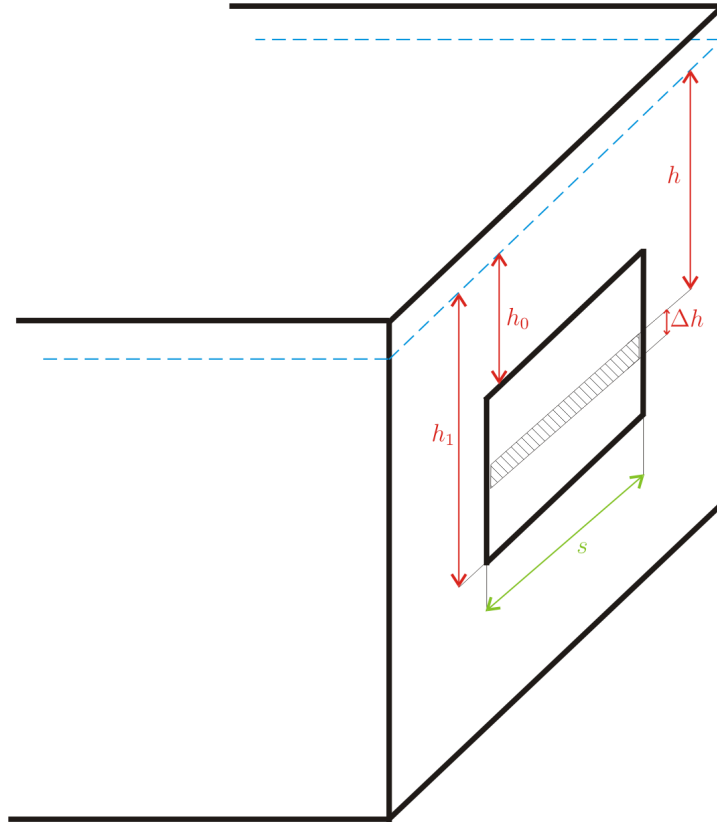
$$\Delta m = \pi \rho h^2(y) \Delta y \text{ [} kg \text{]},$$

musíme zvednout do výšky $v - y$, a tím vykonáme práci

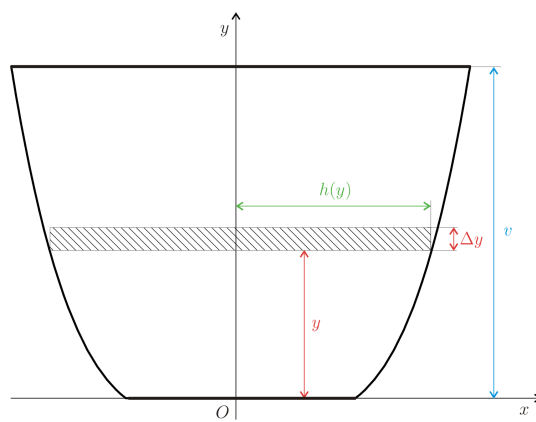
$$\Delta W = \pi g \rho h^2(y) (v - y) \Delta y \text{ [} J \text{]}.$$

Celková práce potom je

$$W = \pi g \rho \int_0^v h^2(y) (v - y) dy \text{ [} J \text{]}.$$



Obrázek 6: Příklad 8.1.



Obrázek 7: Příklad 8.2.



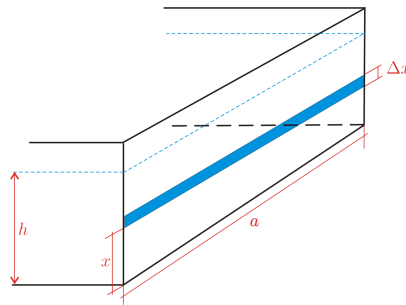
Příklad 8.3. Jakou celkovou tlakovou silou působí kapalina na stěnu nádrže, která je naplněna kapalinou o hustotě $\rho[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$ do výšky h metrů od dna nádrže. Délka stěny je a metrů (viz Obr. 8).

Řešení. Na plošný element $\Delta S = a\Delta x$ v hloubce $h - x$ pod hladinou působí síla

$$\Delta F = \rho g(h - x)\Delta S = \rho g(h - x)a\Delta x.$$

Celková tlaková síla je

$$F = \rho g a \int_0^h (h - x) dx = \rho g a \left[hx - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^h = \frac{1}{2} \rho g a h^2 \text{ [N]}.$$



Obrázek 8: Příklad 8.3.

9 Kontrolní otázky.

- Kdy je funkce F zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) ?
- Čím se liší zobecněná primitivní funkce od primitivní funkce zavedené v modulu *Neurčitý integrál*?
- Co rozumíme Newtonovým integrálem funkce f na intervalu (a, b) ?
- Co je to Riemannův integrální součet funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$?
- Jak se definuje určitý Riemannův integrál?
- Jaká je postačující podmínka pro rovnost Newtonova a Riemannova integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$?
- Uveďte základní vlastnosti Newtonova integrálu.
- Uveďte větu o integraci metodou per partes pro určité integrály.
- Zformulujte větu o substituci pro určité integrály.
- Uveďte integrální součty a odpovídající vztahy pro výpočet
 - a) délky křivky,
 - b) plošného obsahu vybraných rovinných obrazců,
 - c) objemu rotačního tělesa,
 - d) obsahu pláště rotačního tělesa.
- Co rozumíme statickým momentem a momentem setrvačnosti soustavy hmotných bodů vzhledem k přímce?
- Vysvětlete vztahy pro výpočet těžiště homogenní rovinné desky a homogenního rovinného oblouku.

10 Výsledky cvičení.

Cvičení 4.1.

- | | |
|------------------------------|--|
| a) 2 | f) 1 |
| b) $\frac{1}{2}$ | g) $\frac{1}{12}\pi^3 \doteq 2.5839$ |
| c) $1 - \ln 2 \doteq 0.3069$ | h) $\frac{2}{9}\pi\sqrt{3} \doteq 1.2092$ |
| d) $e - 1 \doteq 1.7183$ | i) $\frac{1}{4}\pi + \ln \sqrt{2} \doteq 1.1320$ |
| e) ∞ | j) 4 |



Cvičení 6.1.

- a) $2 \operatorname{argtanh}(\sqrt{2} - 1) [m] \doteq 0.8814 [m]$
- b) $4 \ln 2 - \ln 5 [m] \doteq 1.1632 [m]$
- c) $\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \operatorname{argtanh} \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{argtanh} \frac{1}{\sqrt{1 + e^2}} [m] \doteq 2.0035 [m]$
- d) $2 [m]$
- e) $3a [m]$
- f) $\frac{1}{2}\pi^2 a [m]$



Cvičení 6.2.

- a) $3.3202 [m^2]$
- b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2 [m^2] \doteq 0.4388 [m^2]$



Cvičení 6.3.

- a) $\frac{3}{2}\pi a^2 [m^2]$
- b) $\frac{1}{2}(\sinh 2 - 1) [m^2] \doteq 0.4067 [m^2]$



Cvičení 6.4.

- a) $\pi [m^3] \doteq 3.1416 [m^2]$
- b) $\frac{1}{5}\pi (1 + e^{-2\pi}) [m^3] \doteq 0.6295 [m^3]$
- c) $\frac{3}{10}\pi [m^3] \doteq 0.9425 [m^3]$



Cvičení 6.5.

- $\pi(10 - 2\pi) [m^3] \doteq 11.6767 [m^3]$



Cvičení 6.6.

a) $\pi \left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{5}}{5} \right) [m^2] \doteq 3.8391 [m^2]$

b) $\frac{5}{6}\pi (25 - \sqrt{5}) [m^2] \doteq 59.5958 [m^2]$

**Cvičení 6.7.**

a) $\frac{6}{5}\pi [m^2] \doteq 3.7699 [m^2]$

b) $\frac{16}{9}\pi (2\sqrt{2} - 1) [m^2] \doteq 10.2119 [m^2]$



11 Studijní prameny.



- [1] Bourbaki, N.: *Funkcii dejstvitelno peremennovo*. Moskva 1965.
- [2] Brabec, J., Hruža, B.: *Matematická analýza* I. SNTL, Praha 1985.
- [3] Daněček, J., Dlouhý, O., Koutková, H., Prudilová, K., Sekaninová, J., Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematika* I. VUT FAST Cerm, Brno 2000.
- [4] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialno i integralno iscisenija* II. Nauka, Moskva 1951.
- [5] Milota, J.: *Matematická analýza* I–II. SPN, Praha 1978.
- [6] Prudnikov, A. P., Bryčkov, J. A., Maričev, O. I.: *Integrály i rjady*. Nauka, Moskva 1981.
- [7] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky* I. Prometheus, Praha 1995.
- [8] Schwabik, Š.: *Integrace v R. Kurzweilova teorie*. Karolinum, UK Praha 1999.
- [9] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky* II. SNTL, Praha 1986.
- [10] Ungermann Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh*. SPN, Praha 1990.

A Pojem křivky v rovině.

Motivace. Uvažujme v rovině trajektorii pohybujícího se hmotného bodu po kružnici o rovnici $\gamma : x^2 + y^2 = r^2$. Polohu bodu v každém časovém okamžiku můžeme určit také tak, že každému číslu t z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ přiřadíme bod o souřadnicích $x = \varphi(t) = r \cos t$ a $y = \psi(t) = r \sin t$. Dostáváme tak zobrazení

$$\Gamma = (\varphi, \psi) : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

pro které platí:

- Křivku γ můžeme vyjádřit jako obraz intervalu $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ při zobrazení Γ , tj. $\Gamma(\langle 0, 2\pi \rangle) = \gamma$. Píšeme též $\gamma = \{[\varphi(t), \psi(t)] \in \mathbb{R}^2 : t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$.
- Zobrazení Γ je prosté na $(0, 2\pi)$ a křivka γ je *uzavřená*, protože $\Gamma(0) = \Gamma(2\pi)$.
- Zobrazení Γ má pouze jeden tzv. *dvojnásobný bod*, nebo pro dvě různé hodnoty parametru $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$ dostáváme stejný bod $[1, 0] = \varphi(0) = \varphi(2\pi)$.
- Γ je spojitě na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, tj. složky φ , ψ jsou spojitě na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.
- $\Gamma' = (\varphi', \psi')$ je třídy C^1 na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, tj. složky mají spojitě derivace na uvedeném intervalu.
- $\Gamma'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, nebo

$$\|\Gamma'(t)\| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} = r \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = r > 0$$

pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Abychom mohli ke křivkám zařadit také lomené čáry, asteroidu apod., zavedeme následující definici:

Definice A.1. Množinu $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ nazveme *křivkou v rovině*, jestliže existuje spojitě zobrazení Γ intervalu $\langle a, b \rangle$ na množinu γ takové, že platí:

- 1) Zobrazení Γ je prosté s výjimkou konečně mnoha bodů.
- 2) Zobrazení Γ je po částech třídy C^1 na $\langle a, b \rangle$, tj. Γ' je spojitá s výjimkou konečně mnoha bodů, v nichž existují jednostranné derivace, které mohou být různé.
- 3) Γ' má až na konečně mnoho bodů nenulovou hodnotu v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$.

Zobrazení pak Γ nazýváme *parametrizací* křivky γ .

Nechť $k \in \mathbb{N}$. ekneme, že bod C je k -násobným bodem křivky γ , jestliže existuje právě k různých hodnot parametru $t_1, \dots, t_k \in \langle a, b \rangle$ takových, že $C = \Gamma(t_i)$ pro $i = 1, 2, \dots, k$. Křivka γ se nazývá *jednoduchá*, když nemá vícenásobné body.

Křivka γ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\Gamma(a) = \Gamma(b)$. Uzavřenou křivku nazveme *jednoduchou*, jestliže nemá žádný vícenásobný bod kromě dvojnásobného bodu $\Gamma(a)$.

Je-li I_1, I_2, \dots, I_n dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, pak obrazy dělicích intervalů $\Gamma(I_1), \Gamma(I_2), \dots, \Gamma(I_n)$ jsou opět křivky. Posloupnost těchto křivek nazveme *dělením křivky* γ .

Definice A.2. Je-li parametrizace Γ křivky γ prosté zobrazení a třídy C^1 na celém intervalu $\langle a, b \rangle$ a má přitom nenulovou derivaci (v bodech a, b uvažujeme jednostranné derivace) v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$, nazýváme γ *obloukem* a zobrazení Γ jeho parametrizací.

Oblouk γ je *sjednocením* podoblounků $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, jestliže $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ a oblouky $\gamma_i, \gamma_j, i \neq j$, mají společné nejvýše krajní body.

Poznámka A.1. V technických aplikacích se často křivka γ popisuje bu vektorovou rovnicí

$$\gamma : \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

nebo parametrickými rovnicemi

$$\gamma : x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

Poznámka A.2. Některé křivky je výhodné vyjádřit v polárních souřadnicích. Je-li křivka zadána v kartézských souřadnicích rovnicí $F(x, y) = 0$, pak dosazením za

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

dostaneme rovnici $G(r, \varphi) = 0$ v polárních souřadnicích. Pokud je možné zapsat tuto rovnici ve tvaru $r = g(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pak říkáme, že jde o explicitní tvar rovnice křivky v polárních souřadnicích.

Například pro Bernoulliovu lemniskátu o rovnici

$$(x^2 + y^2)^2 + a^2 \cdot (y^2 - x^2) = 0$$

dostáváme

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 + a^2 \cdot (r^2 \sin^2 \varphi - r^2 \cos^2 \varphi) = 0$$

a odtud $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle$.

Příklady křivek.

1. Elipsa

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

$$\Gamma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

2. Hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Gamma(t) = (\pm a \cosh t, b \sinh t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

3. Polokubická parabola

$$y^2 - ax^3 = 0, \quad x \in \langle 0, \infty \rangle, \quad a > 0$$

$$\Gamma(t) = \left(\frac{t^2}{\sqrt[3]{a}}, t^3 \right), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

4. Asteroida

$$x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0, \quad a > 0$$

$$\Gamma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

5. Steinerova hypocykloida

$$(x^2 + y^2)^2 + 8ax(3y^2 - x^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0, \quad a > 0$$

$$\Gamma(t) = (a(2 \cos t + \cos 2t), a(2 \sin t - \sin 2t)), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

6. Cykloida

$$x = a \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}, \quad y \in \langle 0, 2a \rangle, \quad a > 0$$

$$\Gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

7. Kardioida (srdcovka)

$$(x^2 + y^2)^2 - 6a^2(x^2 + y^2) + 8a^3x - 3a^4 = 0, \quad a > 0$$

$$\Gamma(t) = (a(2 \cos t - \cos 2t), a(2 \sin t - \sin 2t)), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

8. Descartův list

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0$$

$$\Gamma(t) = \left(\frac{3at}{1 + t^3}, \frac{3at^2}{1 + t^3} \right), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad t \neq -1$$

9. Bernoulliho lemnickáta

$$(x^2 + y^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0, \quad a \neq 0$$
$$\Gamma(t) = \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right), \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle$$
$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right\rangle$$

10. Dioklova kisoida

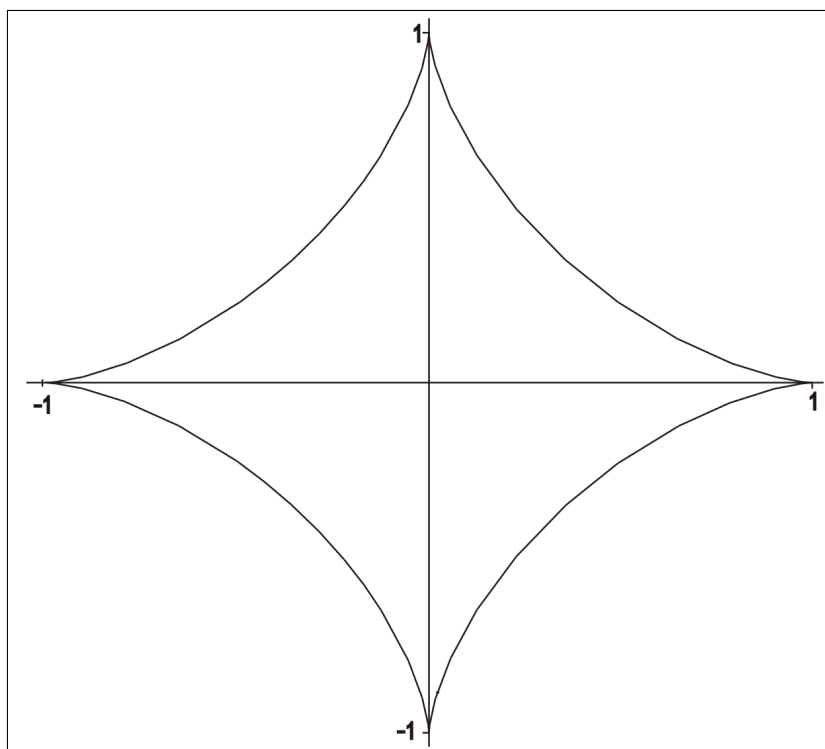
$$y^2 - \frac{x^3}{a-x} = 0, \quad a > 0, \quad x \neq a$$
$$\Gamma(t) = \left(\frac{at^2}{1+t^2}, \frac{at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

11. Logaritmická spirála

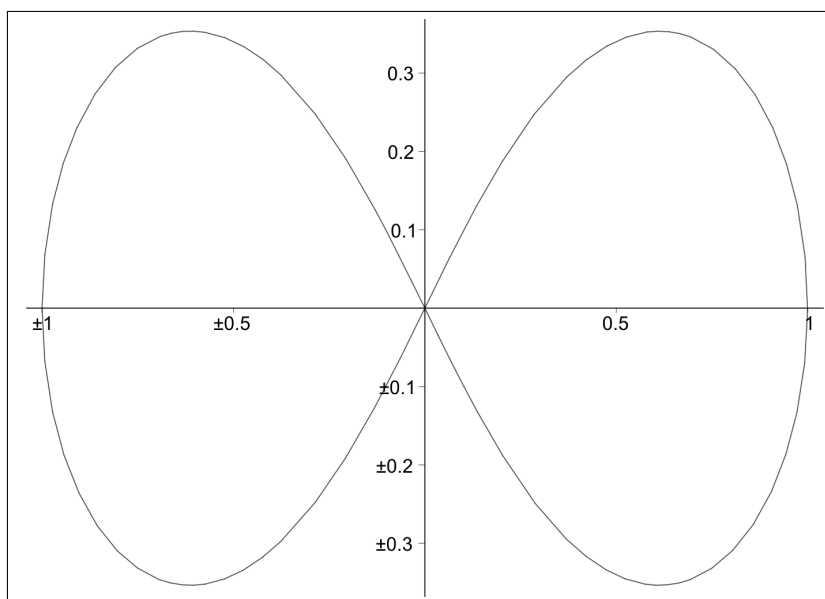
$$\Gamma(t) = b(e^{at} \cos t, e^{at} \sin t), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad a, b > 0$$
$$r = ae^{b\varphi}, \quad \varphi \in \langle 0, \infty \rangle$$

12. Archimédova spirála

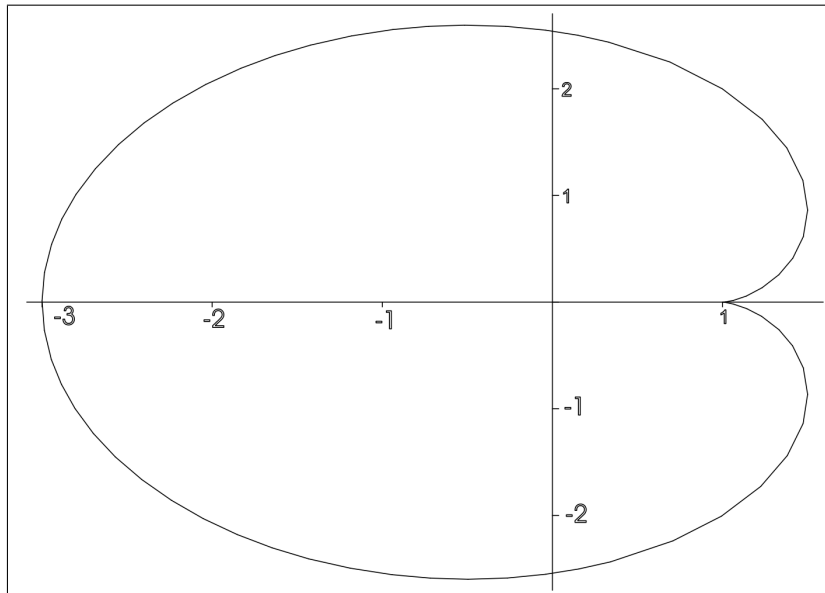
$$\Gamma(t) = (at \sin t, -at \cos t), \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad a > 0$$
$$r = a\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, \infty \rangle$$



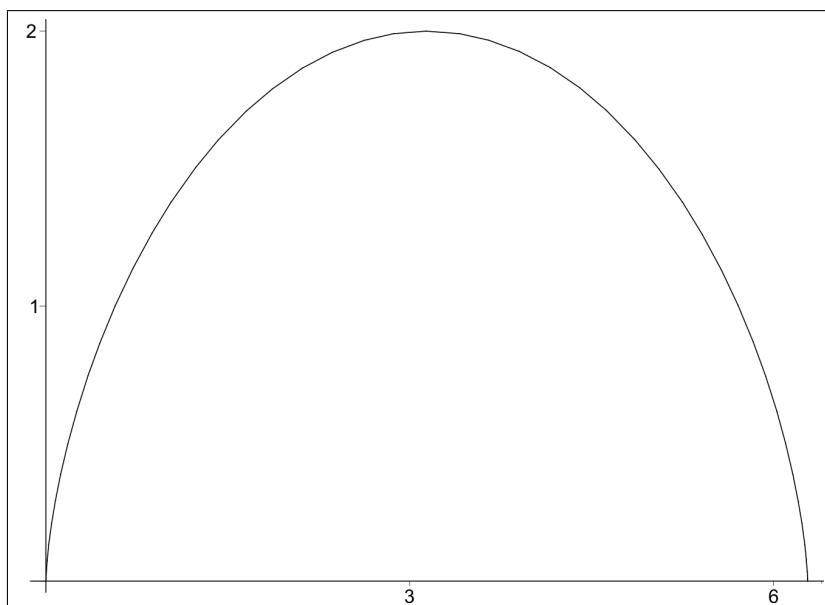
Obrázek 9: ASTEROIDA $a = 1$.



Obrázek 10: LEMNISKÁTA $a = 1$.



Obrázek 11: KARDIOIDA $a = 1$.



Obrázek 12: CYKLOIDA $a = 1$.

Matematika, 1. semestr Zpracoval:

Test č. 5

Jméno:

Adresa:

1. Vypočtěte obsah množiny

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x^2 + 4x - 2, x + y \geq 2\}.$$

Načrtněte obrázek.

2. Vypočtěte obsah množiny

$$B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x^3, y \leq 2/x, x - y \leq 1, x \geq 0\}.$$

Načrtněte obrázek.

3. Vypočtěte obsah omezené části roviny ohraničené parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami v bodech $A = [1, 3]$, $B = [4, 0]$ Načrtněte obrázek.

4. Vypočtěte obsah množiny omezené křivkou zadanou parametricky

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

kde $a > 0$ konstanta.

5. Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ za podmínky $a \leq x \leq b$, kde a, b jsou konstanty takové, že $0 < a < b$.

6. Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky zadané parametricky

$$x = a(\cos t + t \cdot \sin t), y = a(\sin t - t \cdot \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$a > 0$ je konstanta.

7. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/2, e^{-x} \leq y \leq 1 + \sin 2x\}$$

kolem osy x . Načrtněte obrázek.

8. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného osou x a křivkou zdanou parametricky

$$x = t^2, y = t - t^3/3, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3},$$

kolem osy x

